EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 8

Le sujet comporte 4 pages

N.B : Le sujet comprend 2 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé, et d'indiquer clairement les numéros des questions traitées.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Dans les solutions proposées, toutes les affirmations devront être *correctement justifiées, et très lisiblement écrites.*
Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la rigueur des raisonnements, de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

Notations et définitions :

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.
Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de [-1,1] dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes, et pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ formé de la fonction nulle et des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On pourra utiliser l'expression "polynôme" à la place de "fonction polynôme".
On note N la norme ainsi définie sur E :

$$\forall f \in E,\ N(f) = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)| \qquad (1)$$

Il n'est pas demandé de montrer que N est une norme.
Etant donné deux éléments f et g de E, et un réel ε strictement positif, on dit que g est une approximation de f à ε près si et seulement si :

$$N(f-g) \leq \varepsilon \qquad (2)$$

Etant donné une fonction f de E, et un entier naturel n, on dit que g est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f si et seulement si g est une fonction de $\mathcal{P}_n$ telle que :

$$\forall h \in \mathcal{P}_n,\ N(f-g) \leq N(f-h) \qquad (3)$$

Partie I :

1°) Soit f une fonction de E, m son minimum, et M son maximum sur le segment [-1,1]. Soit φ une fonction constante et égale au réel k sur [-1,1].

a) Calculez $N(f-\varphi)$ en fonction de m, M, et k.

b) Déduisez-en l'existence et l'unicité d'un polynôme g_0 de meilleure approximation d'ordre 0 de f, et donnez l'expression de g_0 en fonction de m et M.

2°) Soit n un entier naturel quelconque, et μ le réel défini par :

$$\mu = \inf_{Q \in \mathcal{P}_n} N(f-Q) \qquad (4)$$

Justifiez l'existence de μ, et montrez qu'il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, convergeant vers un élément P de $\mathcal{P}_n$, telle que :

$$N(f-P_k) \underset{k \to +\infty}{\to} \mu \qquad (5)$$

Déduisez-en l'existence d'un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f, soit g_n (on ne demande pas de démontrer l'unicité de g_n).

3°) Soit f une fonction définie sur [-1,1], à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, telle qu'il existe un réel H positif ou nul tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1,1], \left| f^{(n)}(t) \right| \leq H \qquad (6)$$

Soit, pour tout entier naturel n, $S_{n,f}$ le polynôme défini par :

$$\forall t \in [-1,1], \; S_{n,f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \qquad (7)$$

Montrez que la suite $(N(f-S_{n,f}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. Déduisez-en que pour tout réel ε strictement positif, f admet une approximation à ε près, soit g_ε, qui est une fonction polynôme.

4°) Soit f la fonction définie sur [-1,1] par :

$$\forall t \in [-1,1], f(t) = \sin(t) \qquad (8)$$

et, pour tout réel α, h_α la fonction définie par :

$$\forall t \in [-1,1], h_\alpha(t) = \sin(t) - \alpha t \qquad (9)$$

Soit ϕ la fonction définie par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \phi(\alpha) = N(h_\alpha) \qquad (10)$$

a) Montrez que la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

Note : il n'est pas indispensable de calculer une expression de ϕ à l'aide des fonctions usuelles.

b) Montrez que $\phi(\alpha) \underset{\alpha \to -\infty}{\to} +\infty$ et que $\phi(\alpha) \underset{\alpha \to +\infty}{\to} +\infty$.

c) Calculez les valeurs de $\phi(1)$ et $\phi(\sin(1))$, et montrez que $\phi(\sin(1)) < \phi(1)$.

d) Montrez que ϕ admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint pour un unique réel α_0, et que α_0 appartient à l'intervalle $]\sin(1),1[$.

5°) a) Montrez que, f étant une fonction vérifiant les hypothèses du 3°), et pour une certaine valeur de l' entier naturel n, il est possible que le polynôme $S_{n,f}$ défini au 3°) ne soit pas le polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n.

b) Montrez qu'il n'y a pas de polynôme Q dans $\mathcal{P}$ qui approche la fonction f définie en (8) mieux que tout autre sur [-1,1], c'est à dire tel que :

$$\forall R \in \mathcal{P}, N(f-Q) \leq N(f-R) \qquad (11)$$

Partie II:

1°) a) Montrez que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul polynôme P_n tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(nu) = P_n(\cos(u)) \qquad (12)$$

b) Montrez que P_n est de degré n, et calculez son coefficient dominant a_n.

c) Montrez que le polynôme P_n est pair si l'entier n est pair, et impair si l'entier n est impair.

d) Explicitez les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

2°) a) Montrez que pour tout entier naturel non nul n, l'équation :

$$|P_n(t)| = 1 \qquad (13)$$

a exactement n+1 solutions sur le segment [-1,1]. On les note $x_0, x_1, \ldots, x_n$, de sorte que :

$$x_0 > x_1 > \ldots > x_n \qquad (14)$$

Donnez une expression de x_k en fonction des entiers k et n.

b) Montrez que :

$$\forall t \in [-1,1], |P_n(t)| \leq 1 \qquad (15)$$

c) On note F_n la partie de $\mathcal{P}_n$ formée des fonctions polynômes unitaires de degré n. Ainsi, toute fonction P de F_n a une expression de la forme :

$$\forall t \in [-1,1], P(t) = t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0 \qquad (16)$$

Soit T_n le polynôme unitaire associé à P_n , c'est à dire :

$$\forall t \in [-1,1], T_n(t) = \frac{P_n(t)}{a_n} \qquad (17)$$

a_n étant le coefficient dominant de P_n.

Montrez que pour toute fonction P de F_n , on a :

$N(T_n) \leq N(P)$ (18)

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $P = T_n$.

Indication : On pourra étudier les signes de $(T_n - P)(x_k)$.

3°) Soit R un polynôme de $\mathcal{P}_n$.

a) Montrez qu'il existe n+1 réels uniques $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que :

$$\forall t \in [-1,1], R(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(t) \quad (19)$$

b) Montrez que le polynôme de meilleure approximation de R d'ordre n-1 est le polynôme R_{n-1} défini par :

$$\forall t \in [-1,1], R_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(t) \quad (20)$$

On pourra utiliser les propriétés (15) et (18), démontrées au II 2°).

c) Application : soit R le polynôme défini par :

$$\forall t \in [-1,1], R(t) = \frac{(t+1)^3}{4} \quad (21)$$

Déterminez le polynôme de meilleure approximation d'ordre 2 de R, soit R_2. Représentez sur un même dessin les représentations graphiques de R et R_2.

On utilisera un repère orthonormal, avec une unité de 5 cm de longueur.

Quelles sont les abscisses des points d'intersection des deux graphes ?

4°) On suppose comme en I 4°) que f est définie par :

$$\forall t \in [-1,1], f(t) = \sin(t) \quad (8)$$

a) Déterminez le polynôme $S_{5,f}$ selon la définition de I 3°), et déterminez les réels $c_0, c_1, \ldots, c_5$, tels que :

$$\forall t \in [-1,1], S_{5,f}(t) = \sum_{k=0}^{5} c_k P_k(t) \quad (22)$$

b) Déterminez le polynôme de meilleure approximation d'ordre 4 de $S_{5,f}$, soit V_4. On exprimera $V_4(t)$ sous forme de combinaison linéaire des t^k .

c) Montrez que V_4 est une approximation de f strictement meilleure que $S_{4,f}$, soit :

$$N(f-V_4) < N(f-S_{4,f}) \quad (23)$$

On pourra utiliser les propriétés (15) et (18), démontrées au II 2°).

d) Quel lien existe-t'il entre les questions II 4°) c) et I 5°) a) ?

FIN DE L'ENONCE